

Raport Stiintific
pentru perioada 01.12.2009 – 30.11.2010

Proiect cu titlul: **Studierea cuplajului ecuatiilor cinetice cu ecuatii diferentiale stochastice. Aplicatii la problema transportului turbulent in plasmе confinate magnetic**

Partener roman: **Universitatea din Craiova**

Partener strain: **Universite Libre de Bruxelles**

Durata proiectului bilateral este intre ianuarie 2008 si noiembrie 2010

Obiectivele generale urmarite

Cresterea gradului de intelegere a dinamicii plasmei in tokamak si atragerea in domeniul teoriei plasmei de fuziune de tineri cercetatori si integrarea activa in cadrul grupului deja existent in domeniul teoriei plasmei. Pe langa expertiza in domeniul teoriei plasmei de fuziune proiectul are ca obiectiv conectarea la realitatea experimentală pentru participarea in viitor la experientele de la JET si ITER.

Proiectul va face mai vizibila contributia cercetatorilor romani la efortul international din domeniul plasmei de fuziune si la obtinerea sursei de energie a viitorului, reactorul de fuziune.

Partea fundamentala de teorie a proiectului se refera la cuplarea ecuatiilor cinetice cu ecuatii diferentiale stochastice. Este esential a intelege rolul scalelor spatiale si temporale multiple in sistemul de ecuatii. Vom analiza posibilitatile integrării numerice a ecuatiilor care depind de zgomotul Gaussian nestationar.

Obiectivul fazei de execuție IV:

Obiectiv principal:

Cuplajul intre fenomene la scale de timp diferite si includerea fenomenelor negausiene

Sub-obiective:

1. Descrierea unor tranzitii aleatoare intre doua stari ale plasmei prin introducerea unui proces stohastic nestationar. Cuplajul intre fenomene la scale de timp diferite. (Lect. Dr. Pometescu Nicolae, Asistent cercetare Dr. Babalic Mirela)
2. Modelarea efectelor de criticalitate auto-organizata in plasma de fuziune. Efecte de corelatii de lunga durata (Prof. dr. Steinbrecher Gyorgy)
3. Clarificarea unor aspecte ale transportului magnetic anomal in tokamak folosind modele deterministe si descrierea influentei dinamicii stochastice (haotice) asupra proprietatilor transportului. (Conf. Dr. Constantinescu Dana)
4. Observarea influentei perturbării aleatoare a sistemelor ce prezinta bifurcatia Hopf si aplicarea rezultatelor pentru sisteme de interes in fizica plasmei de fuziune. (Conf. Dr. Constantinescu Dana)
5. Aplicarea metodei decorelării trajectoriilor la analiza transportului turbulent. (Lect. Dr. Negrea Marian, Lect. Dr. Petrisor Iulian)

Rezumatul fazei:

In cadrul acestei faze a proiectului au fost efectuate stagii de mobilitate in care s-a conclucrat pentru realizarea obiectivului acestei faze.

Lect. Dr. Nicolae Pometescu a efectuat o vizita la Universite Libre de Bruxelles in perioada 19-24 iulie 2010. In timpul acestei perioade a fost studiata propunerea dr Nicolae Pometescu de utilizare a unui proces stohastic nestationar pentru introducerea mai multor scale de timp diferite in modelarea procesului de transport in plasma prin rezolvarea ecuatiilor diferentiale stohastice de tip V-Langevin aplicate unui sistem cu doua stari in care tranzitia de la o stare la alta se face in mod stohastic.

Conf. dr Dana Constantinescu a efectuat o vizita la Universite Libre de Bruxelles in perioada 29 octombrie – 3 noiembrie 2010. In timpul acestei perioade au fost analizate aspecte ale studiului fenomenelor de transport folosind modele fractionale.

Din partea belgiana dr Boris Weyssow s-a deplasat in Romania la Universitatea din Craiova in perioada 3-9 noiembrie 2010. Au fost continuate discutiile cu dr Pometescu Nicolae si dr Mirela Babalic asupra modelarii transportului in plasma cu ajutorul ecuatiilor diferentiale stohastice prin introducerea in sistemul de ecuatii Langevin a unui termen stohastic non-stationar. Cu dr Negrea Marian si dr Petrisor Iulian au fost discutate aspecte legate de simularile numerice pentru studiul miscarii unei particule test intr-un camp electromagnetic stohastic obtinut ca solutie a ecuatiilor magnetohidrodinamice. Dr Weyssow Boris si dr Constantinescu Dana au discutat pentru clarificarea unor aspecte ale transportului magnetic anomal in tokamak folosind modele deterministe si descrierea influentei dinamicii stohastice (haotice) asupra proprietatilor transportului.

A fost actualizat site-ul web al proiectului unde pot fi gasite date si informatii despre proiect:

<http://cis01.central.ucv.ro/proiectecercetare/valonia/>

Descrierea stiintifica si tehnica

Turbulenta joaca un rol fundamental in deconfinarea plasmei si transferul de energie dintre particule si instabilitati. In acest fel sunt generate particule rapide ce pot altera suprafetele metalice ale peretilor ce intra in contact cu plasma.

Studiile experimentale ale plasmei de fuziune au aratat ca particulele in plasma marginala a tokamakului pot prezenta un comportament non-difuziv (anomal). Acest tip de transport, diferit de cel clasic, poate fi studiat fie in termenii modelelor de auto-organizare (Self Organized Criticality) fie in termenii ecuatiilor diferentiale stohastice cunoscute sub numele de ecuatii Langevin.

Evaluarea coeficientilor de difuzie este un obiectiv important in plasma de fuziune si conduce spre o mai buna intelegere a proprietatilor de transport a particulelor incarcate in campuri electro-magnetice. In prezentul studiu coeficientii de difuzie au fost analizati in cazul tranzitiilor stohastice intre doua stari de temperatura diferita, ca de exemplu tranzitia neregulata a temperaturii electronice intre doua valori la impactul ELM in JET la o descarcare H-mode, sau la injectarea de peleti in descarcările Ohmice si Lower Hybrid in Tore Supra. Transportul particulelor incarcate in aproximatia centrelor de ghidaj este descris prin ecuatii diferentiale stohastice de tip Langevin unde termenul aditiv stohastic a fost considerat in prima faza stationar [1,2] iar apoi generalizat la un proces stohastic nestationar [3].

De asemenea, este cunoscut faptul ca diferite modele pentru descrierea anumitor aspecte ale transportului (deterministe, stochastice, fractionale) sunt legate intre ele si pot fi deduse din aceeasi lege de conservare. Se unifica astfel descrierea transportului in camp magnetic puternic (ecuatia Vlasov) cu aspecte colizionale (ecuatia Fokker-Plank) si cu interactiunea cu campuri electrice turbulente si intermitente (ecuatia fractionala de transport). De aceea studiul modelelor mixte (ecuatii diferentiale stochastice sau ecuatii diferentiale fractionale) este important pentru descrierea aspectelor complexe ale transportului anomal.

1. **Descrierea unor tranzitii aleatoare intre doua stari ale plasmei prin introducerea unui proces stohastic nestationar. Cuplajul intre fenomene la scale de timp diferite.** (Lect. Dr. Pometescu Nicolae, Asistent cercetare Dr. Babalic Mirela)

1.1. Modelarea tranzitiilor aleatoare intre doua stari ale plasmei

In acest studiu se doreste obtinerea coeficientilor de difuzie a particulelor cu sarcina electrica intr-un camp magnetic fluctuant in cazul unei plasme cu doua profile de temperatura in care particula trasoare trece aleatoriu intre un profil de temperatura si altul. Transportul particulelor este aproximat prin transportul centrelor lor de ghidaj. Analiza include atat ciocnirile (astfel incat viteza termica este legata de evolutia temperaturii prin procese stochastice) ce intervin pe o scala de timp definita de frecventa medie de ciocnire, cat si interactia cu unde de radio-frecventa sau pulsuri laser, ce intervin pe o scala de timp ce poate fi diferita de frecventa de ciocnire.

Ecuatiile V-Langevin

Ecuatiile de miscarea particulelor in camp magnetic intens in aproximatia centrelor de ghidaj sunt date prin

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}_{\perp}}{dt} &= \beta \vec{b} [\vec{x}_{\perp}, z] V_z(t) \\ \frac{dz}{dt} &= V_z(t) \\ \frac{dV_z}{dt} &= -\nu_z V_z(t) + \alpha_z(t)\end{aligned}$$

unde $V_z(t)$ este viteza paralela stohastica, $\vec{b}[\vec{x}_{\perp}, z] = \vec{B}/B$ este vectorul unitate de-a lungul campului magnetic, β este amplitudinea fluctuatiilor magnetice, ν_z este frecventa de ciocnire iar α_z este acceleratia stohastica in directia paralela.

Cand α_z este definita printr-un proces de tip „zgomot alb”

$$\langle \alpha_z(t) \rangle = 0, \quad \langle \alpha_z(t) \alpha_z(u) \rangle = A \delta(t - u)$$

In precedentul studiu [1,2] acceleratia α_z era definita printr-un proces de tip „zgomot colorat”

$$\alpha_z(t) = \frac{1}{b-a} [b - \eta(t)] \alpha_{za}(t) + \frac{1}{a-b} [a - \eta(t)] \alpha_{zb}(t)$$

unde procesul stochastic $\eta(t)$, ce ia in mod aleator una din valorile a sau b , este definit ca un proces stochastic stationar „telegraf” prin ecuatiile master

$$\begin{aligned}\partial_t P(a, t | x, t_0) &= -\lambda P(a, t | x, t_0) + \mu P(b, t | x, t_0) \\ \partial_t P(b, t | x, t_0) &= \lambda P(a, t | x, t_0) - \mu P(b, t | x, t_0)\end{aligned}$$

In prezentul studiu procesul stochastic $\eta(t)$ este nestationar si este definit prin ecuatiile master

$$\begin{aligned}\partial_t P(a, t | x, t_0) &= -\lambda(t)P(a, t | x, t_0) + \mu(t)P(b, t | x, t_0) \\ \partial_t P(b, t | x, t_0) &= \lambda(t)P(a, t | x, t_0) - \mu(t)P(b, t | x, t_0)\end{aligned}$$

cu

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \omega \sin^2(\omega t / 2) \\ \mu(t) &= \omega \cos^2(\omega t / 2)\end{aligned}$$

Ca si in cazul stationar avem $\lambda + \mu = \frac{1}{\tau_0}$

unde τ_0 este timpul de corelatie, si de asemenea ca $\langle \eta(t) \alpha_{zj}(t) \rangle = 0$, care arata independenta celor doua procese stochstice, si

$$\langle \alpha_{zi}(t) \rangle = 0, \quad \langle \alpha_{zi}(t) \alpha_{zj}(u) \rangle = 2\delta_{ij} \nu_i V_{T_i}^2(x_{\perp}) \delta(t - u)$$

Cu aceste presupuneri, obtinem probabilitatile conditionale

$$\begin{aligned}P(a, t | \eta, t_0) &= \frac{1}{2}[1 + F(t)] + \left\{ \frac{1}{2}[1 - F(t_0)]\delta_{a, \eta_0} - \frac{1}{2}[1 - F(t_0)]\delta_{b, \eta_0} \right\} \exp[-\omega(t - t_0)] \\ P(b, t | \eta, t_0) &= \frac{1}{2}[1 - F(t)] - \left\{ \frac{1}{2}[1 - F(t_0)]\delta_{a, \eta_0} - \frac{1}{2}[1 - F(t_0)]\delta_{b, \eta_0} \right\} \exp[-\omega(t - t_0)]\end{aligned}$$

cu $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \pi / 4)$

Comportarea asimptotica, la $t \rightarrow \infty$ este data de

$$\begin{aligned}P_{asimp}(a, t | \eta, t_0) &= \frac{1}{2}[1 + F(t)] \\ P_{asimp}(b, t | \eta, t_0) &= \frac{1}{2}[1 - F(t)]\end{aligned}$$

Valoare medie a procesului $\eta(t)$ nu mai este zero (ca in cazul stationar) ci

$$\langle \eta(t) \rangle = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} F(t) + \left\{ \eta_0 - \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} F(t_0) \right] \right\} \exp[-\omega(t - t_0)]$$

cu valoarea asimptotica oscilanta

$$\langle \eta(t) \rangle_{asimp} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} F(t)$$

Corelatia de ordinul doi este data

$$\langle \eta(t)\eta(u) \rangle = N_1(t, u) + N_2(u) \exp[-\omega|t - u|] + N_3(t, t_0) \exp[-\omega(u - t_0)] + N_4(u, t_0) \exp[-\omega(t - t_0)]$$

unde

$$N_1(t, u) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{4} [F(u) + F(t)] + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 F(t)F(u)$$

$$N_2(u) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 [1 - F^2(u)]$$

$$N_3(t, t_0) = \frac{1}{4} \left\{ 2\eta_0^2 [1 - F(t)F(t_0)] - 2b\eta_0 F(t)[1 - F(t_0)] + 2a\eta_0 F(t)[1 + F(t_0)] \right. \\ \left. - (a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) [F(t) + F(t_0)] - (a^2 + b^2) F(t)F(t_0) \right\}$$

$$N_4(u, t_0) = \frac{1}{4} \left\{ \eta_0^2 [1 - F(t_0)] [1 - F(u)] + \eta_0^2 [1 + F(t_0)] [1 + F(u)] + 2b\eta_0 [1 - F(t_0)] F(u) \right. \\ \left. - 2a\eta_0 [1 + F(t_0)] F(u) - a^2 [1 + F(t_0)] [1 - F(u)] - b^2 [1 - F(t_0)] [1 + F(u)] \right\}$$

In limita asimptotica,

$$\langle \eta(t)\eta(u) \rangle_{asimp} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{4} [F(u) + F(t)] + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 F(t)F(u) \\ + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 [1 - F^2(u)] \exp\left[-\frac{|t-u|}{\tau_0}\right]$$

Pentru procesul α_z ,

$$\langle \alpha_z(t) \rangle = 0,$$

si corelatia de ordin doi in limita asimptotica este

$$\langle \alpha_z(t) \alpha_z(u) \rangle = \frac{1}{2} \nu_{za} V_{Ta}^2 \left\{ 1 + F(t) + F(u) + F(t)F(u) + [1 - F^2(u)] \exp[-\omega|t-u|] \right\} \delta(t-u) \\ + \frac{1}{2} \nu_{zb} V_{Tb}^2 \left\{ 1 - F(t) - F(u) + F(t)F(u) + [1 - F^2(u)] \exp[-\omega|t-u|] \right\} \delta(t-u)$$

1.2 Modelul pentru campul magnetic:

Campul magnetic il presupunem ca o suprapunere dintre un camp magnetic intens de echilibru orientat in directia z, si fluctuatii magnetice in directii perpendiculare campului magnetic de echilibru:

$$\vec{B} = B_0 \left\{ \vec{e}_z + \beta b_x(z) \vec{e}_x + \beta b_y(z) \vec{e}_y \right\}$$

Parametrul $\beta \ll 1$ este un numar adimensional ce masoara amplitudinea fluctuatiilor magnetice relativ la campul magnetic de echilibru. Marimile stochastice adimensionale $b_x(z)$, $b_y(z)$ descriu variatia spatiala (si temporala in caz general).

Fluctuatiile magnetice sunt presupuse independente de timp (turbulenta inghetata) cu o simetrie giotropica (adica o simetrie cilindrica in cazul nostru):

$$\langle b_m(z) b_n(z') \rangle = \delta_{mm} \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{2\lambda_{||}}\right]$$

Trecand la transformate Fourier, corelatia de ordin doi se exprima sub forma,

$$\langle \hat{b}_m(k) \hat{b}_n(k') \rangle = \hat{\mathcal{B}}_{\parallel}(k) \delta(k+k') \delta_{mn}$$

unde

$$\hat{\mathcal{B}}_{\parallel}(k) = \frac{\lambda_{\parallel}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\lambda_{\parallel}^2 k^2 / 2)$$

1.3 Corelatia de ordin doi a vitezelor paralele

Pentru corelatia de ordin doi a vitezelor paralele obtinem

$$\begin{aligned} \langle v_z(t) v_z(t+\tau) \rangle &= v_{0z}^2 \exp[-\nu_z(2t+\tau)] \\ &+ (v_{Ta}^2 \nu_{za} + v_{Tb}^2 \nu_{zb}) \exp[-\nu_z(2t+\tau)] \frac{1}{2\nu_z} (\exp[2\nu_z t] - 1) \\ &+ (v_{Ta}^2 \nu_{za} - v_{Tb}^2 \nu_{zb}) \exp[-\nu_z(2t+\tau)] \\ &\times \left[\frac{\omega_0 - 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} + \exp[2\nu_z t] \left[-\frac{\omega_0 - 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} \cos[\omega_0 t] + \frac{\omega_0 + 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} \sin[\omega_0 t] \right] \right] \end{aligned}$$

care in limita asimptotica devine

$$\begin{aligned} \langle v_z(t) v_z(t+\tau) \rangle_{asym} &= v_{Ta}^2 \nu_{za} \left[\frac{1}{2\nu_z} - \frac{\omega_0 - 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} \cos[\omega_0 t] + \frac{\omega_0 + 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} \sin[\omega_0 t] \right] \exp[-\nu_z \tau] \\ &+ v_{Tb}^2 \nu_{zb} \left[\frac{1}{2\nu_z} + \frac{\omega_0 - 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} \cos[\omega_0 t] - \frac{\omega_0 + 2\nu_z}{2(4\nu_z^2 + \omega_0^2)} \sin[\omega_0 t] \right] \exp[-\nu_z \tau] \end{aligned}$$

In cazul particular $\omega = 2\nu_z$ rezulta

$$\langle V_z(t) V_z(t+\tau) \rangle_{asimp} = \frac{\nu_{za} V_{Ta}^2}{\nu_z} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu_z t)}{4} \right) \exp(-\nu_z \tau) + \frac{\nu_{zb} V_{Tb}^2}{\nu_z} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin(2\nu_z t)}{4} \right) \exp(-\nu_z \tau)$$

Concluzii

Dupa cum se observa corelatia de ordin doi a vitezelor paralele in limita asimptotica are o variatie oscilanta in timp cu o amplitudine ce este atenuata printrun factor exponential. Forma explicita de oscilatie depinde de relatia intre cele doua frecvente: cea de ciocnire si cea de rupere a corelatiei prin interventia externa.

Principalele rezultate ale acestui studiu au fost prezentate in cadrul conferintei (vezi [3]), „Physics Conference TIM-10”, Timisoara, 25 - 27 noiembrie 2010, TCP-O11.

2. Modelarea efectelor de criticalitate auto-organizata in plasma de fuziune. Efecte de corelatii de lunga durata (Prof. dr. Steinbrecher Gyorgy)

2.1. Model generalizat de evolutie a instabilitatilor

Modele stochastice reduse in dimensiune joasa au fost studiate atat in articole de fizica cat si de matematica ([4-9]). Acest interes este legat de faptul ca aceasta clasa de modele explica aparitia descresterii algebrice a densitatii de probabilitate la amplitudini mari, fenomen observat in studiul experimental al fenomenelor de criticalitate auto-organizata, referitor mai ales la studiul turbulentei in plasma spatiala si de fuziune [4]. Cu toata simplitatea aparenta, aceasta clasa de modele prezinta o structura fractala complexa a functiei de densitate de probabilitate. Modelele afine stochastice bidimensionale sunt utilizate in mod current la compresie de imagine.

Modelul elaborat anterior in Ref [4] reuseste sa releve proprietati calitative importante ale plasmii de fuziune: explica aparitia simultana a descresterii algebrice a densitatii de probabilitate alaturi de self-similaritate si corelatii temporale de raza lunga.

Modelul stochastic elaborat de noi [10] este o generalizare larga a modelelor din [4-9]. Rezultatele au fost obtinute prin tehnici de analiza functionala in spatii Banach nestandard, precum si in dualele lor: spatii de masuri inzestrate cu topologii slabe definite in acord cu proprietatile asimptotice ale functiei de distributie de probabilitate.

Termenul multiplicativ in aceasta clasa de ecuatii studiate, este un process stationar generalizat, care are functie de corelatie caracterizata prin descrestere algebrica la intervale de timp mari. Este o generalizare a proceselor stationare Gaussiene, cu atat mai mult al proceselor la care este restrans studiul din lucrarea [4]. Termenul aditiv este un termen neliniar care ramane marginit la amplitudini mari. S-a studiat urmatoarea clasa de ecuatii quasilineare stochastice, cu primul termen liniar dominant

$$\frac{d\mathbf{X}_\omega(t)}{dt} = A_\omega(t)\mathbf{X}_\omega(t) + \mathbf{B}_\omega(t; \mathbf{X}_\omega(t))$$

unde $A_\omega(t)$ este un process stationar de medie negativa, avand functie de corelatie temporala care descreste algebric la timp mari. Al doilea termen, neliniar, $\mathbf{B}_\omega(t; \mathbf{X}_\omega(t))$ are momente finite de ordin suficient de mare. Pentru amplitudini mari ale lui $\mathbf{X}(t)$ termenul $\mathbf{B}_\omega(t; \mathbf{X}_\omega(t))$ ramane marginit. S-au obtinut urmatoarele rezultate [10].

a. In conditii foarte generale s-a demonstrat ca exista o distributie stationara de probabilitate. Convergenta catre aceasta distributie (relaxarea) este controlata de topologii slabe definite pe spatii de masuri. Aceste topologii sunt parametrizate de un exponent care este identic cu exponentul de descrestere algebrica a functiei de distributie stationara. Mentionam ca topologiile slabe sunt definite de clase de spatii Lebesgue non- standard, fiind posibila sa aiba exponent subunitar

b. S-a gasit o generalizare a formulei din ref. [4], pentru calculul analitic al exponentului de descrestere algebrica (termenul asymptotic la amplitudini mari, al functiei de distributie de probabilitate).

S-a confirmat faptul ca si in prezenta termenului aditiv neliniar acest exponent este complet determinat doar de proprietatile statistice al zgomotului multiplicativ dominant.

c. Rezultatele de convergenta fundamenteaza si extind rezultatele obtinute referitoare la aspecte fizice a ecuatiilor stochastice unidimensionale din [4-9]. Utilizare versiunii pentru spatii metrice nocompacte ale teoremei Kakutani-Stone, privind densitatea sub-laticilor de functii continue asigura o fundamentare riguroasa a metodelor aproximative de calcul utilizata in studiul fenomenelor de transport anomal din plasma turbulenta din tokamak.

2.2. Studiul numeric al modelelor de criticalitate auto-organizata al turbulentei plasmei de fuziune

Simularea numerica a efectelor de criticalitate auto-organizata, in cadrul modelelor reduse, reclama un algoritm efficient de generare a miscarii Browniene persistente [4]. Desi procesele stochastice modelate de miscare Browniana fractionara prezinta o gama larga de exemple de functii cu proprietati total ne intuitive, aceste procese stochastice reprezinta un model deosebit de efficient in modelarea turbulentei marginale din plasma din tokamak [4].

Rolul special in fizica al miscarii Browniene fractionare este legat de existenta unor teoreme de tip limita central functionala, ca si de simplitatea si naturalitatea axiomei care il definesc in mod univoc [12]. In consecinta nu este surprinzator faptul ca miscarea Browniana fractionara apare in mod natural ca un "scaling limit" in studiul procesului foarte complex de transport anomal de particule incarcate in plasma magnetizata [13,14].

S-a elaborat un algoritm recursiv [8], in care este exploatat rezultatul din lucrarea [4] privind aproximarea stochastica a miscarii Browniene persistente cu un ansamblu statistic self-similar, constand din procese Ornstein-Uhlenbeck integrate.

Metoda este usor de programat si utilizat in calcule Monte-Carlo de pe calculatoare paralele. Spre deosebire de metodele anterioare de generarea a miscarii Browniene fractionare bazata pe transformate Fourier rapida, aceasta metoda permite urmarirea proceselor dirijate de miscare Brownian fractionara pe intervale de timp mari, care nu sunt fixate la inceputul simularii.

S-a elaborat deasemenea un algoritm efficient de control al erorii de aproximare. S-a obtinut o tehnica de aproximare eficienta a componentelor de procese Ornstein-Uhlenbeck care au timp de corelatie foarte scurta. Aceste componente s-au aproximat prin zgomot alb, cu precizie riguros controlata.

Aceste rezultate vor fi folosite in continuare la accelerarea algoritmilor de tip Mont-Carlo folosite in Modelarea Integrata al Tokamakului.

3. Integrabilitate versus haos in sisteme Hamiltoniene neautonome. Aplicatii la studiul unor fenomene de transport (Conf. Dr. Constantinescu Dana)

Spatiul fazelor unor sisteme Hamiltoniene este un amestec complex de zone ale caror puncte au dinamica regulate sau haotica. Zonele regulate (zone in care sistemele sunt integrabile) sunt caracterizate printr-un transport redus. Aceste zone actioneaza ca o bariera de transport care separa diferite zone haotice. In interiorul zonelor haotice transportul este crescut datorita proprietatilor intrinseci ale sistemului.

Studiul barierelor de transport in sisteme Hamiltoniene este important deoarece aceste sisteme au aplicatii mecanica fluidelor, fizica plasmei de fuziune, fizica acceleratorilor de particule

In acest articol au fost propuse rezultate privind existenta si localizarea barierelor interne de transport in sisteme Hamiltoniene cu un grad de libertate supuse unor perturbari periodice, adica in sisteme Hamiltoniene cu $1 \frac{1}{2}$ grade de libertate.

- s-a aratat ca exista o bariera de transport in zona in care Hamiltonianul neperturbat are un punct stationar (Teorema 2 in cele ce urmeaza) si ca nu este obligatoriu pentru existenta barierei ca acest punct sa fie punct de extrem in acea zona (asa cum este de obicei considerat)

- s-a aratat ca bariera de transport intersecteaza asa-numita "curba regulara" care poate fi dedusa analytic din sistem. S-a aratat ca "curba regulara" si curba "shearless" (care poate fi determinate numai numeric) sunt apropiate, deci rezultatul obtinut poate fi plicat direct pentru localizarea barierelor de transport. Barierele de transport nu exista daca toate punctele curbei regulate au comportare haotica. Acest rezultat da un criteriu pentru obtinerea unei comportari haotice globale care modifica drastic proprietatile transportului.

Detalii tehnice legate de rezultate sunt prezentate in cele ce urmeaza.

3.1. Existenta barierelor de transport

Hamiltonianul sistemului, scris in coordonate actiune-unghi, este

$$H(\theta, I, t) = H_0(I) + H_1(\theta, I, t) \quad (1)$$

unde perturbarea H_1 are perioada T , adica $H_1(\theta, I, t) = H_1(\theta, I, t+T)$ for all $t \in \mathbb{R}$

Deoarece sistemele generate de Hamiltonianul (1) sunt in general neintegrabile si studiul numeric direct este complicat, se poate folosi reducerea cu o dimensiune a spatiului fazelor folosind observarea stroboscopica a sistemului.

Aplicatie stroboscopica bidimensionala are forma

$$(\theta_{n+1}, I_{n+1}) = \widehat{T}(\theta_n, I_n) \quad (2)$$

unde t_0 este fixat, de obicei $t_0 = 0$, iar $(\theta_n, I_n) = (\theta(t_0 + nT), I(t_0 + nT))$.

In aceasta situatie \widehat{T} este operatorul de deplasare in timp cu T unitati, adica

$$\widehat{T}(\theta(t), I(t)) = (\theta(t+T), I(t+T)) .$$

Deoarece aplicatia (2) nu poate fi determinata analitic (in general) se folosesc diverse procedee de aproximare a sa, in lucrarea de fata este folosita functia generatoare mixta.

Pentru Hamiltonianul

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon \sum_m H_m(I) \cdot \sum_{n=-M}^M \cos(m \cdot \theta - n \cdot t) \quad (3)$$

cu $2M + 1 \gg 1$, functia generatoare mixta, depinzand de noua actiune si vechiul unghi este

$$F(\theta, \bar{I}) = \theta \cdot \bar{I} + H_0(\bar{I}) + \varepsilon \cdot 2\pi \cdot \sum_m H_m(\bar{I}) \cdot \cos(m\theta) = \theta \cdot \bar{I} + H_0(\bar{I}) + \varepsilon \cdot S(\theta, \bar{I})$$

iar aplicatia stroboscopica e data de

$$\widehat{T}_\varepsilon : \begin{cases} \bar{\theta} = \left(\theta + 2\pi \cdot H'_0(X) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial S}{\partial X}(\theta, X) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial S}{\partial X}(\bar{\theta}, X) \right) \pmod{2\pi} \\ \bar{I} = I - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta, X) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial S}{\partial \theta}(\bar{\theta}, X) \end{cases} \quad (4)$$

unde $X = X(\theta, I)$ este solutia (unica) a ecuatiei implicite

$$X = I - \frac{K}{2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \theta}(\theta, X) \quad (4')$$

Rezultatele teoretice ce urmeaza vor fi exemplificate cu ajutorul unui system de mare importanta in fizica plasmei de fuziune, aplicatia tokamak simetrica

Exemplu: Aplicatia tokamak simetrica descrie configuratia campului magnetic in tokamak-uri (instalatii folosite pentru realizarea fuziunii nucleare termo-controlate). Deoarece tokamak-urile sunt instalatii toroidale este naturala folosirea coordonatelor toroidale (r, θ, ζ) pentru descrierea campului magnetic (ζ este unghiul toroidal iar (r, θ) coordonatele polare intr-o sectiune poloidala, perpendiculara pe pe axa torului).

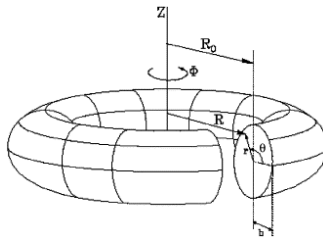


Figura 1: Tokamak-ul si sectiunea poloidala

In locul razei polare r se foloseste de obicei fluxul toroidal $\psi = r^2/2$ pentru ca (ψ, θ) sunt variabile canonic conjugate. Hamiltonianul sistemului este

$$H_T(\psi, \theta, \zeta) = H_0(\psi) - \frac{K}{4\pi^2} \cdot \frac{\psi}{\psi + 1} \cdot \sum_{n=-M}^M \cos(\theta - n\zeta)$$

Hamiltonianul neperturbat este fluxul poloidal ideal $H_0(\psi) = \int W(\psi) d\psi$, unde $W(\psi) = 1/q(\psi)$ este functia de rotire, inverse factorului de siguranta al campului magnetic, $q(\psi)$.

In acest caz ψ reprezinta actiunea iar variabila ζ este interpretata in analogie cu "timpul". In mod evident perturbarea este 2π -periodica in ζ .

In acest caz aplicatia stroboscopica este de fapt aplicatia Poincare asociata sectiunii poloidale $\zeta = \zeta_0$.

In legatura cu existenta barierelor de transport a fost demonstrate urmatoarea teorema

Teorema 1. Daca $H_0'(I) = W_0 \notin \mathbb{Q}$ pentru orice $I \in \mathbb{R}$ si daca exista $b > 2$ si $I_0 > 0$ astfel incat

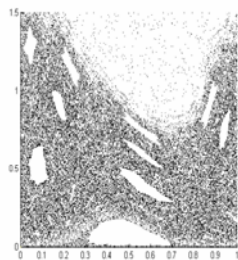
$$d^2 \left((I - I_0) \cdot \sum_m H_m(I) \right) / dI^2 \neq 0, \text{ pentru orice } I \in [0, b], \text{ atunci exista } \bar{\varepsilon} > 0 \text{ astfel incat aplicatia}$$

(4)+(4') are cercuri invariante cu numarul de rotatie W_0 pentru orice $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$.

Teorema 2. Pentru valori sufficient de mici ale lui ε aplicatia (4)+(4'), care satisface ipotezele Teoremei 1, are curbe invariante in zona in care ia de rotatie $W = H_0'(X)$ este aproape constanta.

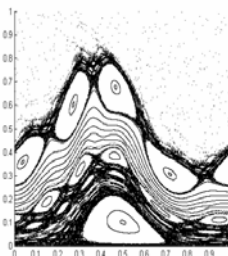
Observatie : Rezultatul are importanta deosebita pentru construirea barierelor de transport. Daca Hamiltonianul neperturbat nu are un punct stationar el poate fi modificat astfel incat un astfel de punct sa apara, ca in exemplul urmatoare.

Sistemul generat de aplicatia Tokamap simetrica avand $W(\psi) = \frac{1}{4}(2 - \psi)(2 - 2\psi + 2\psi^2)$ nu are bariera de transport pentru $K = 4$ (figura 2 stanga), in schimb sistemul avand $W_{bt}(\psi) = \frac{1}{4}(2 - \psi)(2 - 2\psi + 2\psi^2) + \psi^2 \left(2 - \frac{7}{4}\psi\right)$ are bariera de transport pentru $K = 4$ (figura 2centru)



$$W(\psi) = \frac{1}{4}(2 - \psi)(2 - 2\psi + \psi^2), K=4$$

Tokamap



$$W(\psi) = \frac{1}{4}(2 - \psi)(2 - 2\psi + \psi^2) + \psi^2 \left(2 - \frac{7}{4}\psi\right), K=4$$

Degenerate Tokamap

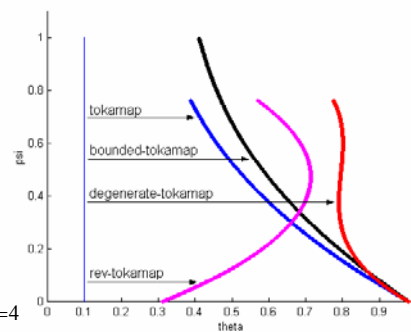


Figura 2 (stanga) nu exista bariera de transport pentru $K = 4$; (centru) exista bariera de transport pentru $K = 4$; (dreapta)

Acesta diferenta apare pentru Hamiltonianul corespunzator lui W nu are punde stationare (graficul sau (linia albastra in figura 2 dreapta) nu are puncte de inflexiune), in timp ce Hamiltonianul corespunzator lui W_{bt} are puncte stationare (graficul sau (linia rosie in figura 2 dreapta) are puncte de inflexiune)

3.2. Localizarea barierelor de transport

Definitie: *Cercul rotational*

$$C_{reg} : W'(X) = 0$$

Se numeste “curba regulara” a sistemului (4)+(4’).

Observatii:

1) In ceea ce urmeaza vom considera situatia tipica in care functia de rotire are un singur punct critic, adica ecuatia $W'(X) = 0$ are solutia unica $I = I_0$ si notam $W(I_0) = W_0$.

In acest caz ecuatia curbei regulate este

$$C_{reg} : X(\theta, I) = I_0 \quad (7)$$

2) In general curba C_{reg} nu este T_ε invarianta, adica $T_\varepsilon(C_{reg}) \not\subset C_{reg}$ si cea mai mica regiune invarianta ce contine C_{reg} se numeste “inelul invariant”

Teorema 3. In conditiile Teoremei 1, cercurile invariante cu numarul de rotatie apropiat de W_0 , daca exista, intersecteaza curba regulara.

In figura 3 sunt prezentate curba regulara si bariere de transport (ce intersecteaza curba regulara, asa cum arata teorema 3)

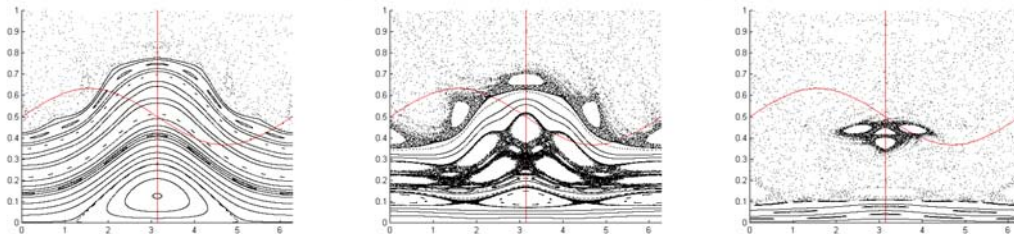


Figura 3 Curba regulara (linia rosie) este intersectata de bariera de transport (stanga, centru). Nu exista bariera de transport (dreapta) deoarece nici un punct al curbei rotationale nu are ca orbita cercuri rotationale

Daca nu exista puncte pe C_{reg} care sa aiba ca orbita cercuri rotationale , atunci nu exista o bariera de transport care sa contina cercuri invariante cu numarul de rotatie apropiat de W_0 (figura 3 dreapta).

III. Largimea barierelor de transport

Largimea barierelor de transport este influentata de « coeficientul de aplatizare » al lui W , definit prin

$$f_W(I_0) = \lim_{I \rightarrow I_0} \frac{\ln |W(I) - W(I_0)|}{\ln |I - I_0|} .$$

Teorema 4. Sa consideram aplicatia (4)+(4') pentru care exista I_0 astfel incat $f_W(I_0) > 1$. Atunci

- a) Exista $\varepsilon_0 > 0$ astfel incat aplicatia (4)+(4') sa aiba cercuri invariante cu numarul de rotatie apropiat de $W(I_0)$ pentru orice $\varepsilon < \varepsilon_0$
- b) Pentru o perturbare fixata in aplicatia (4)+(4'), bariera de transport e mai larga daca coeficientul de aplatizare $f_W(I_0)$ e mai mare.

Exemplificarea acestui rezultat poate fi observata in figura 3 unde sunt considerate ca functii de rotatie $W_p(\psi) = W_0 - c(\psi - \psi_0)^p$, avand coeficientul de aplatizare $f_{W_p}(\psi_0) = p$.

Figura 3 stanga este obtinuta pentru $p=3$, coeficientul de aplatizare e mare si bariera e larga. In figura 3 centru , obtinuta pentru $p=2$, coeficientul de aplatizare a scazut si largimea barierei a scazut si ea, iar in figura 3 dreapta, obtinuta pentru $p=1$ bariera de transport nu mai exista, coeficientul de aplatizare fiind cel mai mic.

IV. Concluzii

Studiul existentei si localizarea barierelor de transport in anumite sisteme Hamiltoniene cu $1 \frac{1}{2}$ grade de libertate poate fi realizata cu ajutorul aplicatiilor stroboscopice si conduce la rezultate interesante, cu extinse aplicatii in practica.

4. Influenta perturbarilor stochastice asupra sistemelor ce prezinta bifurcatia Hopf (Conf. Dr. Constantinescu Dana)

A fost studiat un sistem trei-dimensional de ecuatii diferentiale ordinare care prezinta bifurcatie Hopf . Rezultatul este interesant pentru fizica plasmei de fuziune pentru ca sistemul determinist studiat modeleaza schimbarile globale ale parametrilor plasmei in timpul unei descarcari in tokamak (schimbari ale profilelor sau ale gradientului acestora). In sistemul determinist au fost considerate doua scale diferite de timp si au fost puse in evidenta oscilatii de tip saw-tooth.

Existenta unui ciclu limita stabil (care apare datorita bifurcatiei Hopf) influenteaza dinamica sistemului inducand o comportare oscilanta regulata, asociata periodicitatii.

Modelul determinist studiat este

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} b_n = (p_n' - 1) \cdot b_n - \delta \cdot \frac{d}{dt} b_n \\ \frac{d}{dt} p_n' = \eta \cdot (h - p_n' - \alpha \cdot b_n^2) \end{cases} \quad (1)$$

Necunoscutele sistemului sunt: b_n care reprezinta amplitudinea a campului magnetic perturbat si p_n' care descrie profilul de presiune.

Parametrii $\eta = \frac{2\chi_0}{\gamma_0 \alpha l_{grad}}$, $h = \frac{H_{tot}}{4\pi^2 R \alpha p_{crit}' \chi_0}$ si $\delta = \frac{1}{\sigma \cdot \mu \cdot l_{recon}^2}$, considerati pozitivi, sunt determinati de caracteristicile experimentale.

Studiul punctelor fixe ale sistemului (1) si a stabilitatii acestora este punctul de plecare al descrierii sale dinamice

Teorema 1 Sistemul (1) are punctele fixe $P_1(0,0,h)$, $P_{2,3} = (0, \pm\sqrt{h-1}, 1)$

a) P_1 exista pentru orice $h > 0$. El este asimptotic stabil daca $0 < h < 1$. Pentru $h > 1$ el este un punct de tip sa cu $\dim(W_s) = 2$ si $\dim(W_u) = 1$.

b) P_2 si $P_3 = S(P_2)$ exista $h \geq 1$. Ele sunt stabile daca

$$R_{KL} \cdot h \cdot (R_{KL} + h) \cdot \eta^2 - 2(h-1) > 0.$$

Aparitia ciclurilor limita atratoare situate in jurul punctelor fixe domina dinamica sistemului pentru valori ale parametrilor care sunt relevante din punct de vedere fizic. Ea este efectul unei bifurcatii de tip Hopf, descrisa in urmatoarea teorema.

Teorema 2 Punctele fixe $P_{2,3}$ isi schimba stabilitatea daca si numai daca

$$R_{KL} \cdot h \cdot (R_{KL} + h) \cdot \eta^2 - 2(h-1) = 0$$

In acest caz se realizeaza bifurcatie de tip Hopf, subcritica, adica pentru

$$R_{KL} \cdot h \cdot (R_{KL} + h) \cdot \eta^2 - 2(h-1) > 0 \quad \text{punctele fixe sunt stabile, iar pentru}$$

$$R_{KL} \cdot h \cdot (R_{KL} + h) \cdot \eta^2 - 2(h-1) < 0 \quad \text{ele devin instabile si in jurul lor se formeaza cicluri limita atratoare}$$

Perioada T_0 a solutiilor periodice in punctele de bifurcatie Hopf este $T_0 = \frac{2\pi}{\eta \sqrt{R_{KL} h}}$.

In urma simularilor numerice pentru valoarea fixata $h = 1.5$, planul parametrilor (δ, η) a fost impartit in zone cu comportare dinamica diferita (figura 1)

Zona I: unele orbite sunt atrase de unul dintre cele doua puncte fixe si exista si un atractor straniu.

Zona II : orbite sunt atrase de un ciclu limita aflat in apropierea unui punct fix.

Zona III : orbitele sunt atrase de un ciclu limita dublu ;

Zona IV : orbitele sunt neperiodice, haotice, atrase de un atractor straniu ;

Zona V : orbitele sunt atrase de o orbita periodica si apar oscilatii de tip saw-tooth pentru anumite combinatii ale parametrilor.

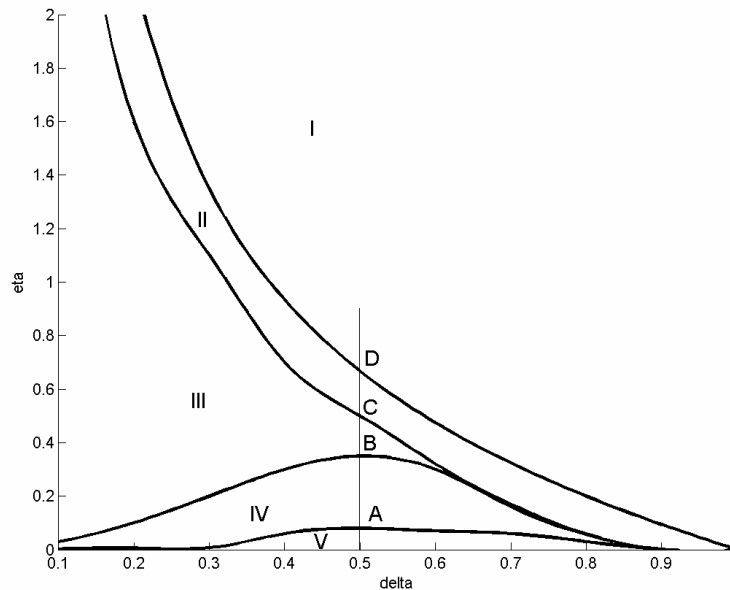


Figura 1 Zonele dinamice pentru $h = 1.5$.

S-a inceput studiul sistemului stochastic obtinut prin afectarea parametrului de bifurcatie cu un zgomot alb de tip Gauss.

In urma studiului numeric a rezultat ca, din punctul de vedere al sistemelor dinamice stochastice, bifurcatia Hopf a fost distrusa, in sensul ca, pentru toate valorile parametrului de bifurcatie sistemul are o singura masura invarianta al carei suport este atractorul aleator global al sistemului.

Studiul este in desfasurare, pentru ca observatiile numerice trebuiesc sustinute prin rezultate analitice.

Rezultatele au fost diseminate prin participarea la conferinta

„6th Mathematical Physics Meeting: Summer school and Conference on Modern Mathematical Physics”, 14-23 Septembrie 2010, Belgrad, Serbia, D. Constantinescu, M-C Firpo, *Integrability versus chaos in non-autonomous Hamiltonian systems. Applications to the study of some transport phenomena*. Lucrarea va fi publicata in volumul conferintei (termen de predare al textului complet 15.12.2010).

5. Aplicarea metodei decorelarii traiectoriilor la analiza transportului turbulent. (Lect. Dr. Negrea Marian, Lect. Dr. Petrisor Iulian)

Utilizand metoda decorelarii traiectoriilor si simularile numerice au fost calculati coeficientii de difuzie pentru electroni. Pentru a realiza aceasta au fost studiate ecuatiile stochastice de tip Langevin care sunt specifice turbulentei electrostatice combinate cu un camp magnetic neperturbat cu “shear”. In acest

studiu au fost incluse condițiile de realizare a regimurilor de difuzie stranii (subdifuzive și superdifuzive) și au fost analizate fenomenele de captură care sunt cauza subdifuziei. Rezultatele obținute pentru coeficienții de difuzie prin metoda decorelării traiectoriilor și prin simulări numerice au fost comparate, acestea fiind într-o concordanță bună [16, 17]. În Figura 1 este reprezentată o traiectorie tipică simularilor numerice.

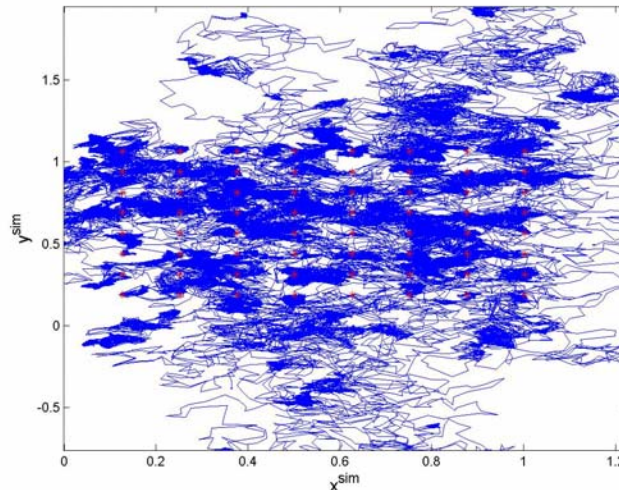


Figura 1. O traiectorie tipică simularilor numerice

A fost de asemenea analizată difuzia unei particule test într-un câmp stohastic electromagnetic, câmpurile electric și magnetic fiind caracterizate de lungimi de corelație și timpi caracteristici diferiți [17]. În model cele două câmpuri au fost considerate ca necorelate stohastice. Acest tip de analiză este fundamental pentru înțelegerea unor experimente din plasma fierbinte precum și a generării de stohasticitate electromagnetic de către bobinele externe. Analiza a fost efectuată utilizând codul TURBO dezvoltat de grupul de cercetare de la Universite Libre de Bruxelles. Am investigat utilizând TURBO, turbulența 2-dimensională produsă într-o cutie de 512×512 moduri ținând cont de faptul că viscozitatea cinematică este egală cu difuzivitatea magnetică. Diferite tipuri de “forcing” au fost testate în regimul MHD și au fost evaluați tensorii de corelație. Concluzia este că ordinul de mărime al corelațiilor mixte este mult mai mic decât cel al autocorelațiilor. În Figura 2 sunt reprezentate deplasările patratiche medii pe direcțiile radială și poloidală pentru un parametru de cuplaj $\alpha = t_A/t_p = 100$, unde t_A este timpul Alfvén iar t_p (timpul propriu al particulei) este practic inversul frecvenței Larmor. În Figura 3 este reprezentată o traiectorie tipică pentru același parametru de cuplaj; se observă clar transportul straniu obținut. Concluziile vor fi utilizate ca punct de plecare în analizele viitoare ale particulei test în diferite combinații de câmpuri stohastice. A fost demarat studiul unui sistem de ecuații diferențiale specifice miscării unei particule test într-un câmp electromagnetic stohastic obținut ca soluție a ecuațiilor magnetohidrodinamice [18]. S-a introdus în expresia forței Lorentz și o forță de frecare care modelează ciocnirile și care este proporțională cu viteza relativă.

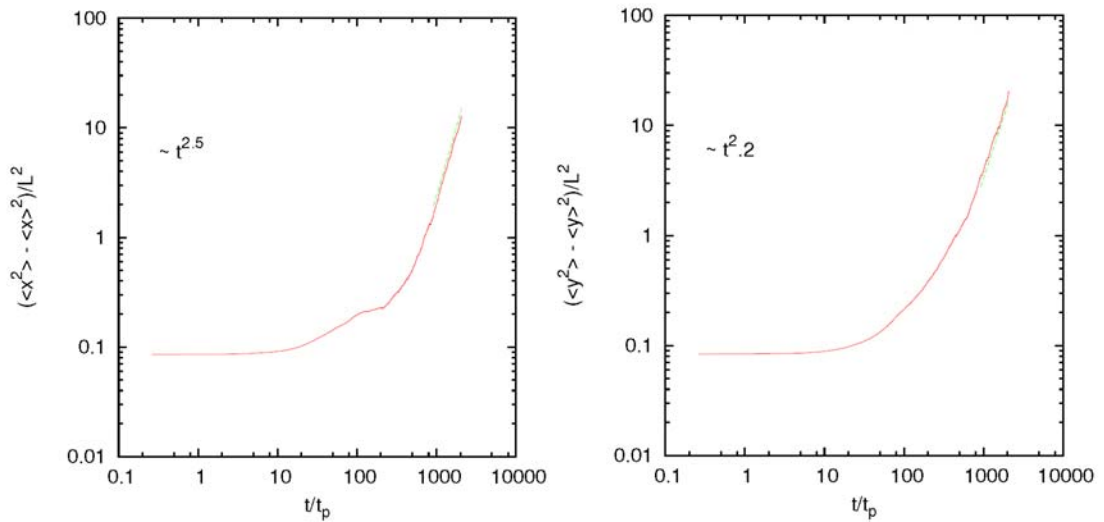


Figura 2 – Deplasarea patratica medie poloidala (stanga) si cea radiala (dreapta).

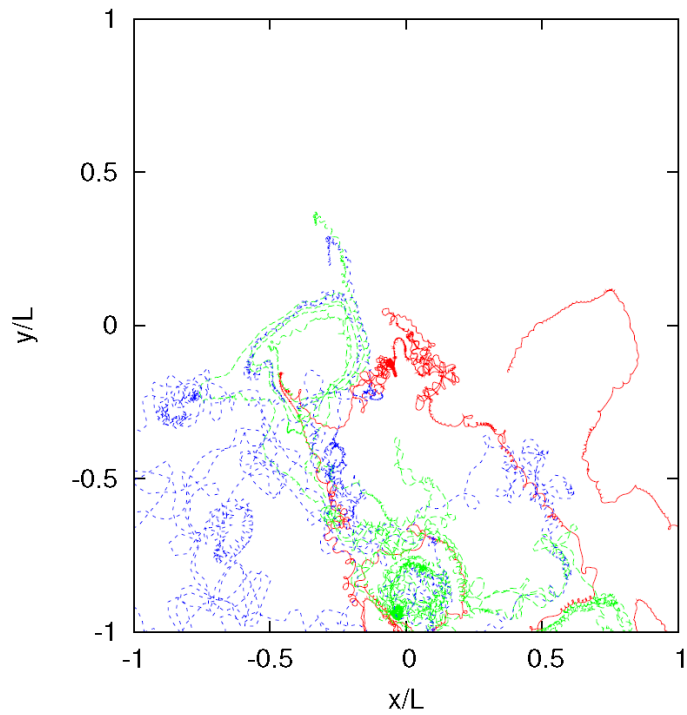


Figura 3 – Traiectorie tipica a particulei test pentru $\alpha = 100$.

In acest studiu au fost utilizate partial facilitatile calcul numeric de la ULB-VUB, Belgia, in colaborare cu Dr. D. Carati, Dr. Bogdan Teaca si grupul de cercetare de la ULB, Belgium.

Bibliografie

- [1] N. Pometescu, B. Weyssow, *Modelling random transition between two temperature profiles in magnetized plasma*, Physica Scripta **82** (2010) 015502. <http://iopscience.iop.org/1402-4896/82/1/015502/>
- [2] B. Weyssow, N. Pometescu, D. Cornea, *Running diffusion coefficient in plasma with two temperatures*, 13-th European Fusion Theory Conference, 12-15 October 2009, Riga, Latvia
- [3] E. M. Babalic, N. I. Pometescu, *Fundamentals of particular non-stationary stochastic process used to model particle transport in stochastic magnetic field*, Physics Conference TIM-10, Timisoara, 25 - 27 noiembrie 2010, TCP-O11.
- [4] Steinbrecher G., Weyssow B., "Generalized Randomly Amplified Linear System Driven by Gaussian Noise. Extreme Heavy Tail and Algebraic Correlation Decay in Plasma Turbulence", Physical Review Letters 92, 125003 (2004).
- [5] G. Steinbrecher, X. Garbet, "Stochastic Linear Instability Analysis", International Workshop on "Hamiltonian Approaches to ITER Physics", CIRM, Marseille, 2-6 November 2009. http://www.cirm.univmrs.fr/web.ang/liste_rencontre/programmes/AbstractsProgRenc395.pdf
- [6] Steinbrecher, W. T. Shaw. "Quantile Mechanics", European Journal of Applied Mathematics, 19, 87, (2008).
- [7] de Saporta, B.; Jian-Feng Yao. Tail of a linear diffusion with Markov switching. Ann. Appl. Probab., **15(1B)**, 992-1018, (2005)
- [8] de Saporta B. „Tail of the stationary solution of the stochastic equation” $Y_{n+1}=a_n Y_n+b_n$ with Markovian coefficients. Stoch. Proc. Appl., **115**, 1954-1978, (2005)
- [9] Sato, A.-H. Explanation of power law behavior of autoregressive conditional duration processes based on the random multiplicative process. Phys. Rev. E **69**, 047101-1 - 047101-4, (2004).
- [10] G. Steinbrecher, X. Garbet. B. Weyssow. Large time behavior in random multiplicative processes. **arXiv:1007.0952v1 [math.PR]**, (2010)
- [11] G. Steinbrecher, B. Weyssow. New representation and generation algorithm for fractional Brownian motion, Roumanian Journal of Physics, **Vol. 55**, Nos 9-10, pag:1120-1130, (2010).
- [12] P. Embrechts, M. Maejima, Selfsimilar processes, Princeton Series in Applied Mathematics, (2002).
- [13] A. Fanjiang, T. Komorowski, Ann. of Appl. Prob. **10**, 1100 (2000).
- [14] T. Komorowski, S. Olla, Journ. Stat. Phys. **108**, 674 (2002).
- [15] „6th Mathematical Physics Meeting: Summer school and Conference on Modern Mathematical Physics”, 14-23 Septembrie 2010, Belgrad, Serbia, D. Constantinescu, M-C Firpo, *Integrability versus chaos in non-autonomous Hamiltonian systems. Applications to the study of some transport phenomena*.
- [16] M. Negrea, I. Petrisor, B. Weyssow, "Influence of magnetic shear and stochastic electrostatic field on the electron diffusion", Journal of Optoelectronics and Advanced Materials Vol. 10, No. 8, August 2008, p. 1942 – 1945.
- [17] B. Teaca, C.C. Lalescu, I. Petrisor, M. Negrea and D. Carati, *On the transport of charged test particles in two-dimensional turbulent plasma* (to be submitted).
- [18] M. Negrea, I. Petrisor, B. Weyssow and Heinz Isliker, *Aspects related to the magnetic field lines diffusion in tokamak plasma*, invited lecture at Volos 2009 - School of Fusion Physics & Technology.